



Proposition pour un sujet de thèse en cotutelle 2026/2027

1 Porteur du sujet à l'Université Libanaise (UL)

1. Nom : Mohamad
2. Prénom : Darwich
3. Titre (Prof, HDR,) : Professeur
4. Laboratoire : Laboratoire de Mathématiques, EDST
5. Adresse Web :
6. Etablissement : Université Libanaise, Faculté des Sciences 1, Hadath
7. Adresse Web : <https://www.ul.edu.lb/fr/colleges-faculties-details/311/Faculte-des-Sciences>
8. Domaines d'expertise :
 - Analyse mathématique des équations aux dérivées partielles
 - Equations dispersives (Problème de Cauchy)
 - Modèles asymptotiques en mécanique des fluides
9. Publications importantes en relation avec le sujet proposé :
 - M.Darwich and S.Israwi . On the generalized nonlinear Camassa-Holm equation. *Anal.Math.Phys.* 11, 39 (2021).
 - M.Darwich. Local and global well-posedness in the energy space for the dissipative Zakharov-Kuznetsov equation in 3D. *Discrete and continuous dynamical systems series B.* Volume 25, Number 9, 3715-3724 (2020).
 - M.Darwich. Invariance of the white noise for the Ostrovsky equation : *Ann Univ Ferrara* 66, 301-324 (2020).
 - M.Darwich. On the stability of the solitary waves to the rotation Benjamin-Ono equation. *Math. Methods Appl. Sci.* Volume 42, Issue 1, 219-228 (2019).
 - M.Darwich, N.Kishimito and L.Molinet. Dispersive limits for some perturbations of the NLS equation. *Monatsh Math* 188, 629-651 (2019).
10. Adresse Web de votre page personnelle :
11. Adresse e-mail : mohamad.darwich@ul.edu.lb



2 Partenaire à l'UPJV

1. Nom : CHEHAB
2. Prénom : Jean-Paul
3. Titre (Prof, HDR, ...) : Professeur des Universités (CEX1)
4. Laboratoire : LAMFA UMR CNRS 7352
5. Adresse Web : <https://www.lamfa.u-picardie.fr/>
6. Etablissement : Université de Picardie Jules Verne, à Amiens
7. Adresse Web : <https://www.u-picardie.fr/>
8. Domaines d'expertise :
 - Analyse Numérique des Equations aux dérivées partielles
 - Algèbre linéaire numérique et optimisation, Calcul Scientifique
 - Modélisation en mécanique des fluides numérique
9. Publications importantes en relation avec le sujet proposé :
 - Jean-Paul Chehab, Youcef Mammeri, Marcos Raydan, Optimization-based stabilization strategies for linearized PDEs, <https://hal.science/hal-05548150v1>, prépublication HAL, soumis, février 2026.
 - J-P Chehab, Hervé Le Meur, Ahmad Safa, Raafat Talhouk, Asymptotic expansion of the solutions to a regularized Boussinesq system (theory and numeric), *Acta Applicandae Mathematicae*, 2024, 191 (1), pp.12
 - J-P Chehab, The Symbol Approximation Method: a numerical approach to the approximation of the symbol of self-adjoint operators, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2024, 43 (2), pp.88
 - Jean-Paul Chehab, Damping, stabilization, and numerical filtering for the modeling and the simulation of time dependent PDE,, *DCDS-S*, August 2021, 14(8): 2693-2728, doi: 10.3934/dcdss.2021-002
 - Jean-Paul Chehab , P. Garnier and Y. Mammeri) , Long-time behavior of solutions of a BBM equation with generalized damping, *Discr. Cont. Dyn. Syst. B*, n 7, september 2015, Pages : 1897 - 1915
 - Jean-Paul Chehab, G. Sadaka, On Damping Rates of dissipative KdV equations, *Discr. Cont. Dyn. Syst. S6-6* December 2013
 - Jean-Paul Chehab, G. Sadaka, Numerical Study of a family of dissipative KdV equations, *Commun. Pure Appl. Anal.* 12 (2013), no. 1, 519–546. 17
10. Adresse Web de votre page personnelle : <https://lamfa.u-picardie.fr/chehab/>
11. Adresse e-mail : Jean-Paul.Chehab@u-picardie.fr



3 Description du sujet de thèse proposé : (3 à 5 pages)

1. Discipline : Mathématiques Appliquées
2. Titre et Résumé : Modélisation et analyse des équations de Green–Naghdi avec vorticité et effet de Coriolis
3. Sujet Description du sujet (contexte scientifique, description du problème, Objectifs,) :

3.a) Contexte Scientifique et description du problème

Introduction

Cette thèse porte sur la dérivation et l'analyse de modèles en océanographie, en particulier des équations des ondes en eau peu profonde. Les modèles de type Green–Naghdi fournissent une approximation dispersive des équations d'Euler à surface libre, adaptée à la description de phénomènes non linéaires et dispersifs.

Dans le cas irrotationnel, ces modèles sont désormais bien compris. L'introduction de la vorticité a déjà conduit à de nouveaux systèmes, dérivés par Castro et Lannes [1], qui font apparaître des variables supplémentaires couplées à la vitesse moyenne. Cependant, dans de nombreuses situations géophysiques, il est également nécessaire de prendre en compte la rotation terrestre à travers la force de Coriolis.

L'enjeu central de cette thèse est ainsi la dérivation de nouveaux systèmes de type Green–Naghdi incorporant simultanément la vorticité et l'effet de Coriolis, puis leur analyse mathématique. Il s'agit de comprendre comment ces deux mécanismes interagissent dans les régimes d'eau peu profonde, et d'identifier la structure des modèles obtenus.

Comme point de départ, on dispose déjà de modèles de Green–Naghdi avec vorticité. En dimensions un et deux, Castro et Lannes [1] obtiennent les systèmes suivants.

Modèles de Green–Naghdi avec vorticité

Cas unidimensionnel

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_x (h\bar{v}) = 0, \\ (1 + \mu\mathcal{T}) (\partial_t \bar{v} + \varepsilon \bar{v} \partial_x \bar{v}) + \partial_x \zeta + \varepsilon \mu \mathcal{Q}(\bar{v}) + \partial_x E = 0, \\ \partial_t v^\sharp + \varepsilon \bar{v} \partial_x v^\sharp + \varepsilon v^\sharp \partial_x \bar{v} = 0, \\ \partial_t E + \varepsilon \bar{v} \partial_x E + 3\varepsilon E \partial_x \bar{v} + \varepsilon \sqrt{\mu} \partial_x F = 0, \\ \partial_t F + \varepsilon \bar{v} \partial_x F + 4\varepsilon F \partial_x \bar{v} = 0. \end{cases} \quad (\text{S1})$$

Cas bidimensionnel

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \nabla \cdot (h \bar{\mathbf{v}}) = 0, \\ (1 + \mu \mathcal{T}) (\partial_t \bar{\mathbf{v}} + \varepsilon (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \zeta + \varepsilon \mu \mathcal{Q}(\bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \\ \partial_t \mathbf{V}^\sharp + \varepsilon (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{V}^\sharp + \varepsilon (\mathbf{V}^\sharp \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} = 0, \\ \partial_t \mathbf{E} + \varepsilon (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{E} + 3\varepsilon \mathbf{E} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \varepsilon \sqrt{\mu} \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathcal{S} = 0, \\ \partial_t \mathbf{F} + \varepsilon (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{F} + 4\varepsilon \mathbf{F} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) = 0. \end{cases} \quad (\text{S2})$$

Dans ces systèmes, $h = 1 + \varepsilon \zeta - \beta b$ désigne la profondeur, \bar{v} (ou $\bar{\mathbf{v}}$) la vitesse moyenne horizontale, et v^\sharp , E , F décrivent les effets de la vorticité.

Ces modèles ont été rigoureusement justifiés dans [2] par des estimations d'énergie adaptées aux équations d'Euler avec vorticité.

Interprétation des modèles

Les systèmes précédents étendent les équations de Green–Naghdi classiques en intégrant les effets de la vorticité via de nouvelles variables. Contrairement au cas irrotationnel, la dynamique ne se réduit plus à la seule évolution de la surface et de la vitesse moyenne.

La variable v^\sharp (ou \mathbf{V}^\sharp en dimension 2) décrit une contribution liée à la structure verticale de la vitesse induite par la vorticité. Les termes E et F (ou \mathbf{E} et \mathbf{F}) correspondent à des moments d'ordre supérieur, traduisant l'influence de la vorticité sur la pression et la distribution de vitesse.

Ces quantités satisfont des équations de transport couplées à la vitesse moyenne, ce qui entraîne une interaction forte entre les différentes composantes du système. En particulier, les équations de quantité de mouvement incluent désormais des contributions supplémentaires issues de ces variables.

La structure du système reste toutefois proche de celle des équations de Green–Naghdi classiques, avec des termes dispersifs d'ordre μ et des non-linéarités d'ordre ε . Cette similarité permet d'envisager des stratégies d'analyse analogues, tout en tenant compte du couplage additionnel d  à la vorticité.

Dans cette thèse, ces modèles servent de point de départ à l'introduction de la force de Coriolis. L'objectif n'est donc pas seulement d'étudier les systèmes avec vorticité déjà connus, mais de dériver de nouveaux modèles où interviennent simultanément vorticité et rotation terrestre, puis d'en analyser la structure.

Verrous scientifiques

La dérivation et l'analyse de modèles de Green–Naghdi avec vorticité et effet de Coriolis soulèvent plusieurs difficultés majeures.

Un premier verrou concerne la dérivation même de ces nouveaux systèmes à partir des équations d'Euler. L'introduction simultanée de la vorticité et de la force de Coriolis modifie la structure des équations et impose d'identifier les termes pertinents dans le régime d'eau peu profonde, ainsi que les nouvelles interactions qu'ils génèrent.

Un second verrou réside dans le couplage entre la vitesse moyenne, les variables additionnelles liées à la vorticité et les termes issus de la rotation terrestre. Contrairement au cas irrotationnel, on doit traiter un système plus riche, où les mécanismes de transport, de dispersion et de rotation interagissent fortement.



La structure dispersive constitue également une difficulté importante. La présence de termes d'ordre supérieur, combinée aux effets de la vorticité et du Coriolis, complique l'obtention d'estimations d'énergie adaptées et l'analyse de la stabilité des solutions.

Par ailleurs, le contrôle des quantités E et F (ou \mathbf{E} et \mathbf{F}), ainsi que celui des nouveaux termes apparaissant dans les systèmes dérivés, demande une analyse fine. Ces quantités évoluent avec l'écoulement tout en r troagissant sur la dynamique globale.

Enfin, l'extension au cadre bidimensionnel ajoute des contraintes techniques supplémentaires, liées à la structure vectorielle des équations et à la gestion simultanée des effets de vorticité et de rotation.

Ces verrous rendent nécessaire le développement d'outils analytiques spécifiques afin de dériver rigoureusement ces modèles, puis d'en établir des résultats d'existence, d'unicité et de stabilité.

Objectifs de la thèse

L'objectif principal de cette thèse est de dériver de nouveaux systèmes de type Green–Naghdi tenant compte à la fois de la vorticité et de l'effet de Coriolis, puis d'en analyser rigoureusement la structure mathématique.

Il s'agit d'abord d'obtenir, à partir des équations d'Euler appropriées, des modèles asymptotiques cohérents dans le régime d'eau peu profonde, en identifiant les termes dominants et les nouvelles variables nécessaires à la description de la dynamique.

Un second objectif est d'établir que ces systèmes sont bien-posés, en déterminant les espaces fonctionnels adaptés et en développant des estimations d'énergie permettant de contrôler l'ensemble des variables.

La thèse vise également à préciser l'influence conjointe de la vorticité et de la force de Coriolis sur la dynamique des solutions, et à mettre en évidence ce qui distingue ces nouveaux systèmes des modèles avec seule vorticité ou des modèles prenant en compte uniquement le Coriolis.

Une attention particulière sera portée au cas bidimensionnel, afin de dériver des systèmes pertinents dans ce cadre et d'en comprendre les difficultés spécifiques.

3. b) Approche Méthodologie

De manière générale, les approches d'analyse mathématique et de simulation numérique seront complémentaires et, après le démarrage de la thèse, nous proc derons par dialogue (aller-retour) des résultats obtenus : les avancées en modélisation et en analyse motiveront des illustrations qui permettront de valider une approche numérique générale ; inversement, les codes validés permettront d'explorer des pistes et de dégager des stratégies pour obtenir des résultats d'analyse. L'approche reposera sur une combinaison de dérivation asymptotique et d'analyse théorique issue des équations aux dérivées partielles non linéaires.

D'abord, une étude détaillée des équations d'Euler avec vorticité et force de Coriolis sera menée pour identifier le régime asymptotique considéré et de dériver de nouveaux systèmes de type Green–Naghdi.

Dans un second temps, la structure de ces équations sera analys e afin de mettre en évidence les mécanismes de couplage entre transport, dispersion, vorticité et rotation.

Ensuite, des estimations d'énergie adaptées seront développées pour contrôler les solutions sur des temps pertinents. Ces estimations devront prendre en compte à la fois les effets dispersifs, les contributions de la vorticité et les termes liés au Coriolis.

Enfin, des arguments de type itératif ou de régularisation seront utilisés pour établir l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions pour les systèmes obtenus.



3. c) Résultats attendus

Le premier résultat attendu est l'obtention (dérivation) et l'étude du problème de Cauchy des modèles de type Green-Naghdi en dimension 1, avec force de Coriolis, avec vorticité et de manière concomitante la production de codes numériques validés.

Le second résultat est l'adaptation du cadre d'analyse mathématique et de code numérique au cas de la dimension 2 d'espace.

Un résultat transversal est de nature méthodologique et porte sur la mise au point d'une stratégie d'articulation entre analyse mathématiques et simulation numérique.

Les codes de calculs seront réalisés en Python et mis à disposition de la communauté scientifique sous forme d'un environnement numérique.

La recherche de modèles d'amortissements et de stabilisations est un développement important qui pourra également être considéré et pour lequel la mise en œuvre de techniques numériques présentées dans [7, 8].

3. d) Calendrier

La thèse débuterait le 1 octobre 2026 pour se terminer le 1 octobre 2029.

- TASK 1: Etude bibliographique sur le sujet. Obtention des modèles asymptotiques cohérents dans le régime d'eau peu profonde, à partir des équations d'Euler appropriées. Compréhension des modèles de Green-Naghdi. Développement.
Début 1 octobre 2026, fin 1 février 2027
- TASK 2: Construction et mise en œuvre des codes de simulation de Green-Naghdi en dimension 1, avec et sans force de Coriolis. Validation sur les bancs d'essai.
Début 1 février 2027, fin 1 juin 2027
- TASK 3 : Analyse mathématique du caractère bien posé des systèmes obtenus.
Début 1 février 2027, fin 1 juin 2027
- TASK 4 : Etude mathématique de la prise compte simultanée de la vorticité et de la force de Coriolis, contributions isolées et conjointes ; mise en évidence par simulations numériques
Début 1 mars 2028, fin 1 septembre 2028
- TASK5 : Passage à la dimension 2
Début 1 juin 2027, fin 1 février 2029
- . TASK 6 : Rédaction du mémoire de thèse.
Début 1 février 2029, 1 octobre 2029.

Des publications seront soumises dans des revues internationales avec comité de lecture. La dissémination des résultats se fera également par des séminaires, et colloques nationaux, d'abord, puis internationaux.



3. e) Mots clés

Système de Green-Naghdi, Vorticité, Coriolis, fond variable, étude du problème de Cauchy, simulation, schémas aux différences finies

Possibilité de Financement

L'université libanaise propose de compléter le financement par des demi-bourses, destinées aux meilleurs éléments de la promotion de master 2.

References

- [1] A. Castro and D. Lannes, *Fully nonlinear long-wave models in the presence of vorticity*, Journal of Fluid Mechanics, 759 (2014), 642–675.
- [2] A. Castro and D. Lannes, *Well-posedness and shallow-water stability for a new Hamiltonian formulation of the water waves equations with vorticity*, Indiana University Mathematics Journal, 64 (2015), 1169–1270.
- [3] C. Guillopé, S. Israwi, R. Talhouk, *Large-time existence for one-dimensional Green–Naghdi equations with vorticity*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S, **14** (2021), no. 10, 3569–3604. doi: 10.3934/dcdss.2021040
- [4] P. J. Dellar and R. Salmon, *Shallow water equations with a complete Coriolis force and topography*, Physics of Fluids, 17 (2005), 106601.
- [5] M. Berjawi, T. El Arwadi, S. Israwi, R. Talhouk, *Well-posedness of the Green–Naghdi model for an uneven bottom in presence of the Coriolis effect and surface tension*, Studies in Applied Mathematics, **147** (2025), no. 3, 799–857.
- [6] R. M. Chen, G. Gui, Y. Liu, *On a shallow-water approximation to the Green–Naghdi equations with the Coriolis effect*, Journal of Differential Equations, **268** (2020), no. 8, 4427–4465.
- [7] J-P Chehab, Hervé Le Meur, Ahmad Safa, Raafat Talhouk, *Asymptotic expansion of the solutions to a regularized Boussinesq system (theory and numeric)*, Acta Applicandae Mathematicae, 2024, 191 (1), pp.12
- [8] J-P Chehab, *The Symbol Approximation Method: a numerical approach to the approximation of the symbol of self-adjoint operators*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2024, 43 (2), pp.88